

MODÈLE D'UNIVERS À COURBURE NON RIEMANNIENNE

Par Patrick MARQUET

INTRODUCTION

Le but de cette théorie est de remodeler les bases conceptuelles physico-mathématiques qui servent à établir le modèle cosmologique du type de ROBERTSON-WALKER toujours en vigueur à ce jour.

Nous nous proposons de généraliser le cadre de la physique macroscopique qui sous-tend le modèle classique ayant en vue une approche unificatrice de la description de l'Univers dans sa globalité.

De quelle généralisation s'agit-il ?

Beaucoup de modèles tenant compte du rayon de courbure variable de l'univers en expansion ont été décrits : tous sont essentiellement basés sur une géométrie de Riemann en s'affranchissant parfois des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de notre Univers à grande échelle.

Nous avons quant à nous préféré choisir une autre voie, en privilégiant l'adjonction d'un deuxième type de courbure dans le cadre des quatre dimensions classiques d'Espace-Temps.

Un des avantages de cette nouvelle perspective permettrait de globaliser le schéma riemannien en réduisant la singularité initiale et la dynamique de l'expansion à une **irrégularité locale**.

Nous aboutissons en outre à la possibilité de réaliser une géométrisation totale du système Espace-temps- Energie matière , ce qui impliquerait une **permanence** de notre Univers, évitant ainsi le problème posé de sa finalité.

Le plan de cette étude se scinde en quatre parties :

- Le chapitre 1 est essentiellement consacré à des rappels de notions classiques.
- Les chapitres 2 3 et 4 qui constituent la théorie proprement dite.

Le chapitre 1 couvre ainsi la théorie des variétés différentiables et insiste

sur la description des structures à connexions affine et métrique dont la connaissance nous sera ensuite utile pour l'introduction d'une variété particulière dans laquelle va s'intégrer notre théorie.

Nous envisageons ensuite au chapitre 2 une extension asymétrique possible de la Relativité Générale, qui constitue au fond une généralisation naturelle de la théorie.

Pour ce faire, nous introduisons à côté de la courbure *riemannienne* usuelle, un autre type de courbure, la courbure dite „segmentaire“ qui est assujettie à la variation covariante (non nulle) du tenseur métrique g_{ab} , définissant ainsi une variété qui élargit la variété Lorentzienne (M, g) .

Nous postulons bien entendu l'absence générale de *Torsion* .

Nous particularisons ensuite ladite variété en écrivant que la variation covariante du tenseur métrique g_{ab} est proportionnelle à un 4-vecteur, le *Vecteur de Weyl* dénoté ici B_a , et nous obtenons dans ce cas, la *Variété de Weyl* désignée par $W4$;

L'introduction d'un tel 4-vecteur n'est nullement arbitraire : elle se déduit naturellement d'une des théories qu'Einstein proposa dès 1923, en considérant les coefficients de connexion comme les variables de champs. (Théorie purement affine) .

Nous aurons alors défini la *Courbure de Weyl* qui généralise la courbure de rotation riemannienne .

Au chapitre 3, nous établissons ensuite l' *Equation de Weyl* :

$$(S_{ab})_{;w} = 0$$

dont le tenseur antisymétrique $(S_{ab})_{;w}$ doit généraliser le tenseur d'Einstein S_{ab} auquel il se réduit , lorsque B_a s'évanouit dans un domaine local.

Suivant un mode précis de variation du 4-Vecteur de Weyl, on parvient alors à une *linéarisation* dite « *riemannienne* » de $W4$, qui entraîne ipso-facto l'apparition d'une *variété conforme*.

Sachant que le tenseur des corps macroscopiques qui sert à décrire usuellement notre Univers à grande échelle dans le *cadre riemannien* , correspond à un schéma « *fluide massique homogène* », nous voyons que dans le cadre de notre théorie, ce schéma devient un « *fluide de type parfait* » (chapitre 4) correspondant à l'apparition d'une métrique conforme : le facteur de conformité doit ainsi inclure un terme de pression

lié à la densité moyenne de l'Univers par une équation d'état classique .

La variation de ce terme de pression à cette approximation riemannienne (qui subsiste même en l'absence de constante cosmologique), se trouve alors généralisée précisément par le 4-vecteur de Weyl.

Le modèle d'Univers *non riemannien* à courbure de Weyl imposerait ainsi un « **état confiné** » qui se traduirait physiquement à l'*approximation riemannienne* de notre échelle, par la manifestation d'une pression permanente .

La nature de cette « pression » peut-être alors explicitée par la contribution moyenne d'un flux de particules rapides qui baignerait l'Univers tout entier.

Une conception récente étayée en particulier par la vitesse orbitale « anormalement » élevée des étoiles dans les galaxies ainsi que par l'accélération « anormale » observée sur la trajectographie des sondes interplanétaires a été présentée par Claude POHER .

Cette théorie, qui prévoit l'existence dans tout l'espace de particules énergétiques , les *Universons libres* , permettrait ainsi d'accréditer les conclusions de notre étude.

Le lecteur qui désire approfondir certains domaines se rapportant à l'aspect relativiste de notre sujet, peut se reporter à la bibliographie forcément restreinte, citée aux pages 6 et 7.

Enfin, nous aimerions ici rendre hommage à Monsieur André Lichnérowicz (†), professeur au Collège de France, en soulignant l'importance prépondérante de ses travaux consacrés aux théories relativistes de la gravitation, et à qui nous avons beaucoup emprunté pour la rédaction de ce mémoire.

Monsieur Lichnérowicz demeure le grand instigateur de l'*Algèbre Différentielle* dont la méthodologie mathématique a permis une analyse particulièrement rigoureuse de la Relativité Générale, ouvrant ainsi la voie aux développements contemporains les plus avancés de cette discipline.

QUELQUES NOTATIONS

Indices

Nous adopterons ici la convention d'Einstein suivant laquelle il y a sommation sur tout indice répétés deux fois dans une même expression

4-tenseur ou 4-vecteur : indices latins : $a, b, \dots = 1, 2, 3, 4$

3-tenseur ou 3-vecteur : indices grecs : $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, 3$

Elément de 4-volume : d^4x

Elément de 3-volume : d^3x

Elément de groupe : indices latins majuscules : $A, B, \dots = 1, 2, 3, 4$

Variétés

(M, \mathbf{g}) : Lorentz

W4 : Weyl

Tenseur métrique

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{ab} \theta^a \otimes \theta^b && \text{(base duale)} \\ \mathbf{g} &= g_{ab} dx^a \wedge dx^b && \text{(coordonnées locales)} \end{aligned}$$

Signature de la métrique d'Espace-Temps :

Hyperbolique normale : $(+ - - -)$

Opérations

Fonction scalaire : $U(x^a)$

Dérivée usuelle : $U_{,a}$ ou $\partial_a U$

Dérivée covariante :

Dans (M, \mathbf{g}) : ∇_a ou ∇'_a ;

Dans W4 : D_a ou ∇_a ;

Une-Forme : σ

Contraction : $\langle \sigma, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X} \sigma$

Dérivée de Lie : \mathcal{L}

$$\mathcal{L}_X \mathbf{Y} = X^b (\partial / \partial x^b) (Y^a \partial / \partial x^a) - (Y^b \partial / \partial x^b) (X^a \partial / \partial x^a)$$

Tenseurs

Symétrisation : $A_{(ab)} = \frac{1}{2}!(A_{ab} + A_{ba})$

Antisymétrisation : $A_{[ab]} = \frac{1}{2}!(A_{ab} - A_{ba})$

Symbole de Kronecker : $\delta_{ab} = (+1, \text{ si } a = b, 0, \text{ si } a \neq b)$

Tenseur indicateur de Levi-Civita : $\varepsilon_{abcd} \quad (\varepsilon^{1234} = 0)$

Coefficients de Commutation : $D_{bc} = [e_b, e_c] = D_{bc}^a e_a$

Unités

Relativistes : ($c = 1$) partout, sauf constante de Planck : h (dans certains cas mentionnée)

Constante cosmologique : $\Lambda = 0$

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- 1. W.H. Bonnor. J.N. Islam. M.A.H. MacCallum**
- *Classical General Relativity* - Cambridge University Press (1984)
- 2. I.L. Buchbinder. S. Odintsov . I.L. Shapiro**
- *Effective Action in Quantum Gravity* - I.O.P. Bristol (1992)
- 3. L. De Broglie**
- *Eléments de la Théorie des Quantas et de Mécanique Ondulatoire* - Gauthier-Villars . Paris (1959)
- 4. P.A.M. Dirac**
- *Les Principes de la Mécanique Quantique* - P.U.F. Paris (1931)
- 5. A. Einstein**
- *A Generalization of the Relativistic Theory of Gravitation* - Princeton (1946)
- 6. S.W. Hawking**
- *The Large Scale Structure of Space time* - Cambridge University Press (1973)
- 7. D. Kramer. H. Stephani . E. Hertl**
- *Exact Solutions of Einstein's field Equations* - Cambridge University Press (1980)
- 8. L. Landau et E. Lifchitz**
- *Théorie des Champs* - Editions MIR Moscou (1970)
- *Théorie Quantique Relativiste (Tomes IV et V)* - Editions MIR Moscou (1962)
- 9. A. Lichnérowicz**
- *Les Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme* - Masson et Cie. Paris (1955)
- 10. G.G. Ross**
- *Grand Unified Theories* - The Benjamin /Cummings Publishing Co. Menlo (1982)

11. N. Straumann

- *General Relativity and Relativistic Astrophysics* - Springer Verlag .
Berlin (1984)

12. M.A.Tonnelat

- *Les Théories Unitaires de l'Electromagnétisme et de la Gravitation* -
Gauthier-Villars . Paris (1959)

13. H. Weyl

- *Temps, Espace, Matière* - Springer . Berlin (1923)

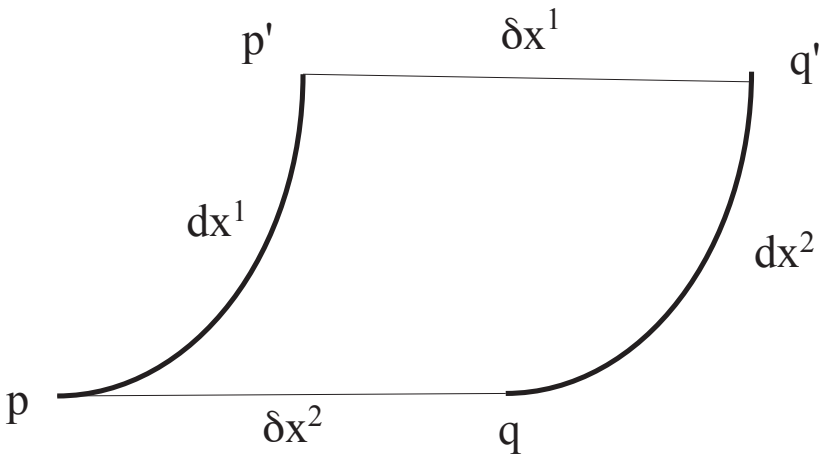
Chapitre 1 . Variétés connexes

1.1 Connexion affine

1.1.1 Tenseur de courbure

a) Transport parallèle

Considérons le transport parallèle d'un vecteur $\mathbf{V}(A^a)$ le long d'un parallélogramme fermé infiniment petit, défini dans une variété M :



Dans un repère général (e_a) , les 4 côtés sont repérés par :
 $dx^1, dx^1 + \delta x^1, dx^2 + \delta x^2$

posons : $ds^{ab} = \frac{1}{2} (dx^a \delta x^b - dx^b \delta x^a) c$
 (élément de surface infinitésimal) ($a = 0, 1, 2, 3, \dots, n$)

Examinons à présent le transport parallèle de \mathbf{V} défini en p vers p' :

$$\partial_b A^a = -\Gamma_{cb}^a A^c \Rightarrow (dA^a)_{||} = -\Gamma_{cb}^a A^c dx^b \quad (1.1)$$

Les composantes A^a de \mathbf{V} le long du contour fermé ds^{ab} sont données par :

$$\Delta A^a = - \int \Gamma^a_{cb} A^c dx^b, \quad \text{ou} \quad \Delta A_a = \int \Gamma^c_{ab} A_c dx^b$$

Appliquons le théorème de Stokes pour la surface Δs^{ab} , nous obtenons :

$$\Delta A_a = \frac{1}{2} [\partial_b (\Gamma^c_{ad} A_c) - \partial_d (\Gamma^c_{ab} A_c)] \Delta s^{bd} \quad (1.2)$$

$$\text{Substituant (1.1) dans (1.2),} \quad \Delta A_a = \frac{1}{2} [A_c R^c_{abd}] \Delta s^{bd}$$

Les quantités R^c_{abd} sont les composantes d'un tenseur du 4ème ordre que nous identifions naturellement avec le „Tenseur de Courbure “ \mathbf{R}

$$R^c_{adb} = \partial_b \Gamma^c_{ad} - \partial_d \Gamma^c_{ab} + \Gamma^c_{eb} \Gamma^e_{ad} - \Gamma^c_{ed} \Gamma^e_{ab} \quad (1.3)$$

b) Définition générale

Considérons 3 vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ définis dans un repère (e_a) , nous pouvons écrire la relation suivante :

$$R^a_{bcd} X^c Y^d Z^b = (Z^a_{;d} Y^d)_{;c} X^b - (Z^a_{;d} X^d)_{;c} Y^c - Z^a_{;d} (Y^d_{;c} X^c - X^d_{;c} Y^c) \quad (1.4)$$

qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{X}}(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) - \nabla[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{Z} \quad (1.5)$$

Contractons maintenant (1.4) avec la 1-Forme σ :

$$\sigma_a X^b X^c X^d R^a_{bcd} = \langle \sigma, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \rangle \quad (1.6)$$

On peut en déduire la définition générale du tenseur de courbure :

$$\mathbf{R} = R^a_{bcd} e_a \otimes \theta^b \otimes \theta^c \otimes \theta^d \quad (1.7)$$

C'est un tenseur de type (1_3) qui applique l'ensemble ordonné $(\sigma ; \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ composé d'une 1-Forme σ , et de 3 vecteurs $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ en le nombre réel

$$\langle \sigma, \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \rangle$$

1.1.2 2-Forme de courbure

Toujours par rapport à un repère général (e_a) , il est possible d'établir la relation suivante :

$$\langle \theta^a, \mathbf{R}(e_c, e_d) e_b \rangle = R^a_{bcd} \quad (1.8)$$

et en posant :

$$\langle \theta^a, \mathbf{R}(e_c, e_d) e_b \rangle = \langle \theta^a \Omega^e_b(e_c, e_d) e_e \rangle = \Omega^a_b(e_c, e_d) \quad (1.9)$$

nous aurons défini la „2-Forme de courbure“ ou encore appelée :

„*Courbure de rotation*“.

D'après la définition du produit extérieur de deux 1-Forme, nous savons que :

$$A = B \wedge C$$

a pour composantes : $(B_c C_d - C_d B_c) = \varepsilon_{cdab} A^{ab}$

(où ε_{cdab} est le tenseur indicateur de Levi-Civita)

Appliqué au parallélogramme infinitésimal défini par (1.0), nous obtiendrons pour une base duale :

$$ds^{cd} = \frac{1}{2} (\theta^c \wedge \theta^d) \quad (1.10)$$

la „2-Forme de courbure“ peut être alors développée suivant l'expression :

$$\Omega^a_b = -\frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = R^a_{bcd} ds^{cd} \quad (1.11)$$

1.1.3 Expression de la connexion générale

a) Variation du vecteur parallèlement transporté

Considérons à nouveau notre parallélogramme infiniment petit, et proposons nous d'évaluer la variation générale du vecteur \mathbf{V} de composantes A^a dans un repère (e_a) , au cours d'un transport parallèle toujours le long de ce contour fermé :

à partir de

$$(\mathbf{V})^2 = g_{ab} A^a A^b$$

La longueur de ce vecteur subit une variation :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{V}d\mathbf{V} &= (dg_{ab}) A^a A^b + g_{ab} (dA^a) A^b + g_{ab} A^a (dA^b) \\ &\quad (1.12) \\ &= (dg_{ab} - \Gamma^d_{ac} dx^c g_{db} - \Gamma^d_{bc} dx^c g_{ad}) A^a A^b \end{aligned}$$

(en vertu de 1.1)

En tenant compte de la différentielle covariante du tenseur métrique g_{ab} :

$$Dg_{ab} = dg_{ab} - (\Gamma^e_{ad} g_{eb} + \Gamma^e_{bd} g_{ae}) dx^d \quad (1.13)$$

On obtient :

$$2\mathbf{V}d\mathbf{V} = (Dg_{ab}) A^a A^b \quad (1.14)$$

Posons maintenant :

$$D_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^e_{ac} g_{eb} - \Gamma^e_{bc} g_{ae} = B_{ab,c} \quad (1.15)$$

Nous aurons ainsi à partir de (1.14) :

$$2\mathbf{V}d\mathbf{V} = B_{ab,c} A^a A^b dx^c \quad (1.16)$$

et le long du contour :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{V} \int d\mathbf{V} &= \iint (\partial_d B_{ab,c} - \partial_c B_{ab,d}) A^a A^b dx^d \delta x^c \\ &+ 2B_{ab,c} A^b (\partial_d A^a) (dx^d \delta x^c - \delta x^d dx^c) \quad (1.17) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (1.1) :

$$2V \int dV = \iint B_{abcd} A^a A^b ds^{cd} \quad (1.18)$$

en ayant posé :

$$B_{abcd} = \partial_c B_{ab,d} - \partial_d B_{ab,c} + 2\Gamma_{ad}^f B_{fb,c} - 2\Gamma_{ac}^f B_{fb',d} \quad (1.19)$$

et $ds^{cd} = \frac{1}{2}(dx^c \delta x^d - \delta x^c dx^d)$ (1.20)

remplaçant $B_{ab',c}$ par $D_c g_{ab}$ dans le second membre de (1.18), et en simplifiant, on trouve :

$$B_{abcd} A^a A^b ds^{cd} = 2 g_{be} R^e_{acd} A^a A^b ds^{cd} \quad (1.21)$$

où les R^e_{acd} sont les composantes d'un tenseur ayant la même forme que (1.3)

$$R^e_{acd} = \partial_d \Gamma^e_{ac} - \partial_c \Gamma^e_{ad} + \Gamma^e_{ac} \Gamma^f_{fd} - \Gamma^f_{ad} \Gamma^e_{fc}$$

La variation dV de la longueur d'un vecteur „ parallèlement transporté “ le long d'un contour fermé infiniment petit, s'exprime finalement par :

$$\int dV = (1/V) \iint R_{abcd} A^a A^b ds^{cd} \quad (1.22)$$

On voit bien que cette variation se réduit à (1.18), et s'annule avec $D_c g_{ab}$.

Si $D_c g_{ab} \neq 0$, il n'est pas possible de définir une unité de longueur absolue, en quelque point de la variété générale M.

b) Coefficients de connexion

Soit toujours la variété générale M rapportée à un repère naturel (e_a) ;

Nous pouvons décomposer les coefficients de connexion Γ^c_{ab} de la façon suivante :

$$\Gamma_{ab}^c = \{^c_{ab}\} + K_{ab}^c + (\Gamma_{ab}^c)S \quad (1.23)$$

En effet à partir de :

$$\Gamma_{ab,c} = g_{ce}\Gamma^{eab} \quad (1.24)$$

la relation(1.13) s'écrit encore

$$D_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma_{ac,b} - \Gamma_{bc,a} = B_{ab,c} \quad (1.25)$$

Permutons dans (1.25), les indices a et c, puis b et c. Nous obtenons deux relations analogues (1.26) et (1.27). Formons (1.26) + (1.27) - (1.25) , il vient alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab,c} &= \{^c_{ab}\} + \frac{1}{2} (T_{ac,b} + T_{bc,a} + T_{ab,c}) \\ &- \frac{1}{2} (B_{ac,b} + B_{bc,a} - B_{ab,c}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

et en élevant l'indice c :

$$\begin{aligned} \Gamma^{cab} &= \{^cab\} + \frac{1}{2} g^{ce}(T_{ae,b} + T_{be,a} + T_{ab,e}) \\ &- \frac{1}{2} g^{ce}(B_{ae,b} + B_{be,a} - B_{ab,e}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$T^{cab} = g^{ce}T_{ae,b} = (\Gamma^{cab} - \Gamma^{cba}) \quad (1.30)$$

constitue la partie antisymétrique de la connexion , et révèle la *Torsion* de la variété.

$$K^{cab} = \frac{1}{2} (T^{cab} + T^{cab} + T^{cba}) \quad (1.31)$$

représente le *Tenseur de Contorsion*.

Les $\{^cab\}$ sont ici les *symboles de Christoffel de 2ème espèce* .

Enfin on a :

$$(\Gamma^{cab})S = \frac{1}{2} g^{ce} (D_b g_{ae} + D_a g_{be} - D_e g_{ab}) \quad (1.32)$$

Cette dernière expression caractérise une propriété particulière de la variété générale M , liée à un type de courbure spécifique :

« la **Courbure Segmentaire** . »

Cette deuxième courbure va jouer un rôle majeur dans le développement de notre théorie.

1.1. 4 Formules de structure

a) Torsion

Etant donné un repère général (e_a) , et 2 vecteurs \mathbf{X} et $\mathbf{Y} \in M$, le *Tenseur de Torsion* est défini par la relation suivante :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \quad (1.33)$$

De façon analogue à (1.13), nous pouvons définir la *2-Forme de Torsion* :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Omega^d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) e_d \quad (1.34)$$

où :

$$\Omega^c = \frac{1}{2} T^c_{ab} \theta^a \wedge \theta^b \quad (1.35)$$

Avec comme en (1.10) et (1.11) :

$$T^c_{ab} = \langle \theta^c, \mathbf{T}(e_a, e_b) \rangle = \langle \theta^c, \Omega^d(e_a, e_b) e_d \rangle \quad (1.36)$$

$$\text{C'est-à-dire : } \Omega^c(e_a, e_b) \quad (1.37)$$

Les T^c_{ab} coïncident avec les composantes du „Tenseur de Contorsion“ définies par (1.31)

b) Courbure Contractée

A partir de (1.13), contractons la 2-Forme de courbure :

$$\Omega = \Omega^a{}_a = -\frac{1}{2} R^a{}_{acd} \theta^c \wedge \theta^d = -R^a{}_{acd} ds^{cd} \quad (1.38)$$

c'est-à-dire :

$$\Omega = -\frac{1}{2} g^{ab} (B_{abcd}) ds^{cd} \quad (1.39)$$

en effet :

$$R^a_{acd} = \partial_d \Gamma^a_{ac} - \partial_c \Gamma^a_{ad} \quad (1.40)$$

Et comme d'après (1.15) :

$$\partial_c g^{ab} = -g^{af} g^{bk} \partial_c g_{fk} = -\Gamma^a_{ec} g^{eb} - \Gamma^b_{ec} g^{ae} - g^{af} g^{bk} B_{fk,c}$$

on a :

$$R^a_{acd} = -\frac{1}{2} \partial_d (g^{ab} B_{ab,c}) + \frac{1}{2} \partial_c (g^{ab} B_{ab,d})$$

ou

$$R^a_{acd} = \frac{1}{2} g^{ab} (\partial_c B_{ab,d} - \partial_d B_{ab,c} + \Gamma^e_{ad} B_{ea,c} + \Gamma^e_{bd} B_{ae,c} - \Gamma^e_{ac} B_{eb,d} - \Gamma^e_{bc} B_{ae,d}) \quad (1.41)$$

D'autre part, selon (1.39), nous pouvons écrire :

$$B_{abcd} A^a A^b ds^{cd} = -(\mathbf{V}^2/2) \Omega \quad (1.42)$$

Ainsi la relation (1.18) prend la forme :

$$\int d\mathbf{V} = -\frac{1}{4} \iint \Omega \quad (1.43)$$

c) Synthèse des formules de structure

Etant donnée une base générale (e_a) dans une variété M , il est en général possible d'associer à tout transport parallèle d'un vecteur autour d'un contour fermé infiniment petit :

- Une Courbure de Rotation :

$$\Omega^a_b = -\frac{1}{2} R^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d \quad (1.44)$$

- Une Torsion :

$$\Omega^a = \frac{1}{2} T^a_{cd} \theta^c \wedge \theta^d \quad (1.45)$$

- Une Courbure Segmentaire :

$$\Omega = -\frac{1}{2} R^a_{acd} \theta^c \wedge \theta^d \quad (1.46)$$

1.2. Variétés à connexion métrique

1.2.1 Variétés de Riemann

a) Définition

Une variété de Riemann est complètement déterminée par les conditions suivantes :

- Torsion : $\Omega^a = 0$
- Courbure Segmentaire : $\Omega = \Omega^a_a = 0$

b) Tenseur de Riemann

Dans une base générale (e_a) , les composantes des coefficients de connexion métrique s'écrivent :

$$\Gamma^c_{da} = \frac{1}{2} (D^c_{da} - g_{ae} g^{cb} D^e_{db} - g_{de} g^{cb} D^e_{ab}) + \frac{1}{2} g^{cb} (g_{ab,d} + g_{bd,a} - g_{da,b})$$

Les D^e_{ab} sont les *Coefficients de Commutation* pour les vecteurs repère (e_a) :

$$D^a_{bcea} = [e_b, e_c] \Rightarrow 2\Gamma^a_{[b,c]} = -D^a_{bc}$$

Après calculs, nous obtenons les composantes du *Tenseur de Riemann* :

$$G^a_{bgh} = \Gamma^a_{hb} e_g - \Gamma^a_{gb} e_h - \Gamma^a_{bf} D^f_{gh} + \Gamma^a_{gf} \Gamma^f_{hb} - \Gamma^a_{hf} \Gamma^f_{gb} \quad (1.47)$$

rapportées à une base générale (e_a) .

Dans toute la suite de notre étude et sans restreindre la généralité, nous adopterons un repère naturel.

Dans ce dernier cas :

$$D_{bc}^a e_a = [\partial/\partial x^b, \partial/\partial x^c] = 0 ,$$

Et (1.47) se réduit à :

$$G^{abgh} = \partial_g \{^{ahb}\} - \partial_h \{^{agb}\} + \{^{agf}\}\{^{fhb}\} - \{^{ahf}\}\{^{fgb}\} \quad (1.47)'$$

où les $\{^{ahb}\}$ sont encore les *Symboles de Christoffel de Seconde Espèce*.

(1.47)' correspond bien à l'expression générale (1.3) définissant les composantes du tenseur de courbure pour une variété à connexion affine.

Rappelons enfin que pour une variété de Riemann de dimension n , il existe $(1/12) n^2 (n^2 - 1)$ composantes indépendantes du tenseur \mathbf{G} .

c) Décomposition du tenseur de Riemann

Afin d'éviter toute confusion possible sur la terminologie à venir, rappelons l'expression du **Tenseur de Weyl** (qui se distingue du **Vecteur de Weyl**) :

Le tenseur de Riemann de composantes (1.47)' dans une base naturelle e_a peut être décomposé d'une manière unique en :

$$- G_{abcd} = C_{abcd} + 2 / (n-2) (g_{a[d} G_{c]b} + g_{b[c} G_{d]a}) + 2 / (n-1) (n-2) G g_{a[c} g_{d]b} \quad (1.48)$$

pour une variété lorentzienne.

Les C_{abcd} sont les composantes du **Tenseur de Weyl** qui s'annule par contraction sur tout couple d'indices.

En relativité générale, le Tenseur de Weyl est la partie du tenseur de Riemann qui n'est pas affectée par la distribution locale de matière.

1.2.2 Variétés conformes

a) Connexion conforme

Si les longueurs de la variété considérée varient en fonction de la contraction ou dilatation du tenseur métrique, on peut définir la fonction scalaire $U(x^a)$, telle que :

$$(g_{ab})' = e^U g_{ab} \quad , \quad (g^{ab})' = e^{-U} g^{ab} \quad (1.49)$$

Dans ce cas, il est possible d'exprimer les coefficients de connexion $(\Gamma^c)'$ en fonction de Γ :

$$\begin{aligned} (\Gamma^{cab})' &= \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_b g_{da} + \partial_a g_{db} + \partial_d g_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} g^{cd} e^{-U} [\partial_b (g_{da} e^U) + \partial_a (g_{db} e^U) - \partial_d (g_{ab} e^U)] \\ &= \Gamma^{cab} + \frac{1}{2} g^{cd} [g_{da} \partial_b U + g_{db} \partial_a U - g_{ab} \partial_d U] \quad (1.50) \end{aligned}$$

$$(\Gamma^{cab})' = \Gamma^{cab} + \delta^{c(a, U, b)} - \frac{1}{2} g_{ab} U'^c$$

De la même façon, la dérivée covariante d'une 1-Forme se transforme comme :

$$(\nabla_a \sigma_b)' = \nabla_a \sigma_b - \frac{1}{2} (U_{,b} \sigma_a - U_{,a} \sigma_b + g_{ab} U'^c \sigma_{c})$$

b) Tenseur de Riemann conforme

Les tenseurs de Riemann de deux variétés munies des métriques $(g_{ab})'$ et g_{ab} sont reliés par les relations :

$$(G^{dabc})' = e^{-U} [G^{dabc} + 4N^{[a}_{[b} \delta^{d]c]}] \quad (1.51)$$

avec :

$$N^a_b = \frac{1}{2} (U'^a{}_{;b} - U'^a U_{,b}) + \frac{1}{4} \delta^a_b U_{,e} U'^e$$

c) Tenseur de Ricci

On obtient :

$$(G^{ab})' = G^{ab} - 2N_{ab} - g_{ab}N^c{}_c \quad (1.52)$$

et pour la courbure scalaire :

$$G' = G - 3U^{;d}{}_{;d} - 3/2 (U_{,d} U^{;d}) \quad (1.53)$$

Tenant compte de (1.51) , (1.52) et (1.53), il est facile de voir que :

$$(C_{bcde})' = (C_{bcde})$$

Le tenseur de Weyl est conformément invariant ;

Un espace à n dimensions (n>3) est « conformément plat », si toutes les composantes C_{bcde} s'annulent.

d) Tenseur d'Einstein conforme

Toujours sous la même transformation de la métrique, on trouve :

$$(S_{ab})' + S_{ab} + 3/2 (\partial_a U \partial_b U - 1/2 g_{ab} g^{cd} \partial_c U \partial_d U) - e^{-U} (\nabla_a \partial_b e^U - g_{ab} \nabla_c \partial^c e^U) \quad (1.54)$$

Rappelons également que pour le déterminant des g_{ab} on a :

$$g' = e^{4U} g \quad (\text{donc } (\sqrt{g})' = e^{2U} \sqrt{g})$$

Chapitre 2 . Extension asymétrique de la Relativité Générale

2.1 Postulat fondamental

2.1.1 Connexion particulière

Nous reproduirons ici les éléments de base de la théorie purement affine , proposée par A . Einstein , dès 1923.

Celle-ci postule l'existence d'une variété à 4 dimensions d'espace-temps, qui généralise la variété de Riemann usuelle.

En outre, cette variété est dépourvue de torsion :

Les seules variables sont alors les 40 coefficients de connexion affine ayant la forme générale :

$$\Gamma^{abc} = \{ {}^abc \} + (\Gamma^{abc})_S \quad (2.0)$$

Les derniers coefficients symétriques sont donnés par (1.32), c'est-à-dire par la « connexion segmentaire » .

2.1.2 Equations eulériennes

Les composantes du tenseur de Ricci formées avec les Γ^{abc} s'écrivent toujours

$$R_{bc} = \partial_a \Gamma^{abc} - \partial_c \Gamma^{aba} + \Gamma^{dbc} \Gamma^{ada} - \Gamma^{dba} \Gamma^{adc} \quad (2.1)$$

Pour le choix de la fonction d'action , Einstein part de la densité invariante formée naturellement de deux tenseurs du 2^{ème} ordre :

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^{ab}R_{ab} \quad (2.2)$$

avec :

$$\mathbf{R}^{ab} = \sqrt{g} R^{ab}$$

Nous écrivons le principe d'action stationnaire :

$$\delta S = \int \mathbf{h} d^4x = 0 \quad (2.3)$$

Pour une variation $\delta\Gamma^{abc}$, on aura donc :

$$\delta S = \int [(\partial\mathbf{h}/\partial\Gamma^{abc})\Gamma^{abc} + (\partial\mathbf{h}/\partial(\partial_e\Gamma^{abc}))\delta(\partial_e\Gamma^{abc})] d^4x = 0 \quad (2.4)$$

La variation de \mathbf{h} s'écrit encore :

$$\delta \int \mathbf{R}^{bc}R_{bc} d^4x = \int [(\mathbf{R}^{bc}\partial R_{bc}\delta\Gamma^{a_{de}})/\partial\Gamma^{a_{de}} + (\mathbf{R}^{bc}\partial R_{bc}\delta(\partial_f\Gamma^{a_{de}}))\partial/\partial(\partial_f\Gamma^{a_{de}})] d^4x = 0 \quad (2.5)$$

Intégrant par parties :

$$\delta \int [(\mathbf{R}^{bc}\partial R_{bc}/\partial\Gamma^{a_{de}}) - \partial_f((\mathbf{R}^{bc}\partial R_{bc})/\partial(\partial_f\Gamma^{a_{de}}))] \delta\Gamma^{a_{de}} + \int \partial_f[\mathbf{R}^{bc}\partial R_{bc}\delta\Gamma^{a_{de}}/\partial(\partial_f\Gamma^{a_{de}})] d^4x = 0 \quad (2.5)'$$

Si les variations $\delta\Gamma^{a_{de}}$ s'annulent à la limite du domaine d'intégration, la contribution de la dernière intégrale en divergence est nulle.

La condition (2.5) se réduit à :

$$\delta \int \mathbf{R}^{ab} R_{ab} d^4x = \int [Q_a{}^{bc}\delta(\Gamma^{a_{bc}})] d^4x = 0 \quad (2.6)$$

avec

$$Q_a{}^{bc} = \mathbf{R}^{de}\partial R_{de}/\partial\Gamma^{a_{bc}} - \partial_f[\mathbf{R}^{de}\partial R_{de}/\partial(\partial_f\Gamma^{a_{bc}})] \quad (2.7)$$

Le principe d'action stationnaire entraîne alors pour $\Gamma^{a_{bc}}$ symétrique, les équations eulériennes :

$$Q_a{}^{(bc)} = 0 \quad (2.8)$$

2.1.3. Dérivations du Tenseur de Ricci

D'après l'expression (2.1), calculons les dérivées :

$$\partial R_{df} / \partial (\partial_e \Gamma^{abc}) = \delta^e_m \delta^b_d \delta^c_f \delta^m_a - \delta^e_f \delta^b_d \delta^c_m \delta^m_a \quad (2.9)$$

et

$$\begin{aligned} \partial R_{df} / \partial \Gamma^{abc} &= \delta^l_m \delta^b_d \delta^c_f \Gamma^m_{lm} + \delta^m_a \delta^b_l \delta^c_f \Gamma^l_{dm} \\ &- \delta^l_a \delta^b_d \delta^c_f \Gamma^m_{lf} - \delta^m_a \delta^b_l \delta^c_f \Gamma^l_{dm} \end{aligned} \quad (2.10)$$

substituant à présent dans (2.7) :

$$\begin{aligned} Q^{bc}_a &= \partial_a R^{bc} - \delta^c_a \partial_e R^{be} - R^{bc} \Gamma^m_{am} - \delta^f_a R^{dc} \Gamma^b_{df} \\ + R^{bf} \Gamma^c_{af} + R^{fc} \Gamma^b_{fa} &= R^{bc',a} - \delta^c_a R^{be',e} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec : $R^{bc',a} = \partial_a R^{bc} + \Gamma^{bea} R^{ec} + \Gamma^c_{ea} R^{eb} - \Gamma^{eae} R^{bc}$

la condition (2.8) se traduisant ainsi par :

$$(R^{bc} + R^{cb})',_a - \delta^c_a R^{be',e} - \delta^b_a R^{ce',e} = 0 \quad (2.12)$$

2.2 Variété de Weyl

2.2.1 Asymétrie du tenseur de Ricci

Il est possible de décomposer R^{bc} en une partie symétrique g^{bc} , et une partie antisymétrique F^{bc} :

$$R^{bc} = g^{bc} + F^{bc} \quad (2.13)$$

Nous poserons :

$$J^b = F^{ba',a} \quad (2.14)$$

En contractant (2.12) en c et a , on obtient :

$$g^{bc',c} = -5/3 J^b \quad (2.15)$$

Aprésent si nous substituons (2.15) dans (2.12) , les conditions (2.8) s'écrivent finalement :

$$\mathbf{g}^{bc',a} = -1/3(\delta^b_a \mathbf{J}^c + \delta^c_a \mathbf{J}^b) \quad (2.16)$$

2.2.2 Connexion de Weyl

Afin de pouvoir déterminer la forme précise de la connexion, nous allons chercher à expliciter la densité (2.16).

On obtient en divisant par \sqrt{g} :

$$\begin{aligned} \partial_a \mathbf{g}^{bc} + \mathbf{g}^{bc} \partial_a \text{Log} \sqrt{g} + \Gamma^{b_{ea}} \mathbf{g}_{ec} + \Gamma^{c_{ea}} \mathbf{g}_{be} - \Gamma^{a_{ea}} \mathbf{g}_{bc} \\ = -1/3 (\delta^b_a \mathbf{J}^c + \delta^c_a \mathbf{J}^b) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous aurons posé :

$$\mathbf{J}^a = \sqrt{g} J^a \quad , \quad \mathbf{g}^a = \sqrt{g} g^a \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^{ab} = \sqrt{g} g^{ab}$$

d'où en multipliant par g_{bc} , et en tenant compte de

$$g_{ba} g^{ca} = \delta^c_b \quad \text{et de} \quad : \quad dg = g g^{bc} dg_{bc} = -g g_{bc} dg^{bc}$$

nous déduisons :

$$\Gamma^{e_{ae}} = \partial_a \text{Log} \sqrt{g} + 1/3 J_a \quad (2.18)$$

Posons alors :

$$J_a = 6 B_a \quad (2.19)$$

les composantes des coefficients de connexion s'écrivent maintenant :

$$\Gamma^{e_{ae}} = \partial_a \text{Log} \sqrt{g} + 2 B_a \quad (2.20)$$

Il est alors facile d'observer que cette dernière connexion n'est autre que l' expression contractée de la connexion particulière définie par les coefficients :

$$(\Gamma^{b_{ae}}) = \{ \begin{smallmatrix} b \\ ae \end{smallmatrix} \} + 1/2 [\delta^b_a B_e + \delta^b_e B_a - g_{ae} B^b] \quad (2.21)$$

Or, nous savons que parmi les structures physiquement possibles d'une variété à torsion nulle, il n'existe que deux courbures admissibles : la courbure de rotation et la « Courbure segmentaire » dont la connexion a été écrite en (1.32) :

$$(\Gamma^{b_{ae}})_s = \frac{1}{2} g^{bc} [D_e g_{ac} + D_a g_{ec} - D_c g_{ae}] \quad (2.22)$$

Les derniers coefficients de (2.21) s'identifient donc aisément avec les $(\Gamma^{b_{ae}})_s$ que la théorie a posé en (2.0) .

d'où :

$$B_e g_{ac} = - D_e g_{ac} \quad (2.23)$$

Nous appellerons « **Connexion de Weyl** », l'expression générale (2.0) :

$$(\Gamma^{b_{ae}})_W = \{^{b_{ae}}\} + (\Gamma^{b_{ae}})_s \quad (2.24)$$

avec les $(\Gamma^{b_{ea}})_s$ établis maintenant à partir de la connexion (2.21) .

La nouvelle variété ainsi pourvue de cette 2^{ème} courbure segmentaire particulière, sera appelée « **Variété de Weyl** » et dénotée **W4** dans toute la suite de notre étude.

Sa courbure générale est « **la Courbure de Weyl** ».

Chapitre 3. Théorie asymétrique de Weyl

3.1 Equation de Weyl

Nous allons maintenant développer l'appareil mathématique de l'extension asymétrique de la Relativité Générale dans le cadre de la courbure de Weyl :

Nous nous proposons d'établir dans W4 une équation unique propre à régir les schémas énergétiques *fluide homogène neutre*, qui sont usuellement appliqués à la description de la matière contenue dans notre univers (tenseur massique des corps macroscopiques).

3.1.1 Cas extérieur

a) Tenseur de courbure

A l'aide de l'expression de la connexion générale (1.23) , et en supposant l'absence de torsion ($K^c_{ab} = 0$) , nous pourrons former les composantes d'un tenseur de courbure du 4^{ème} ordre :

$$R^c_{abd} = \partial_d \Gamma^c_{ab} - \partial_b \Gamma^c_{ad} + \Gamma^e_{ab} \Gamma^c_{ed} - \Gamma^e_{ad} \Gamma^c_{eb}$$

Celles-ci peuvent alors s'exprimer en fonction des composantes du tenseur de Riemann G^c_{abd} :

$$\begin{aligned} R^c_{abd} = & G^c_{abd} - \frac{1}{2} \delta^c_a B_{bd} + \frac{1}{2} (\delta^c_b \nabla_d B_a - \delta^c_d \nabla_b B_a) \\ & + \frac{1}{2} (g_{ad} \nabla_b B^c - g_{ab} \nabla_d B^c) + \frac{1}{4} (g_{ab} B_d - g_{ad} B_b) B^c \\ & + \frac{1}{4} (\delta^c_b g_{ad} - \delta^c_d g_{ab}) B_e B^e + \frac{1}{4} (\delta^c_d B_b - \delta^c_b B_d) B_a \end{aligned} \quad (3.0)$$

où l'on a posé :

$$B_{bd} = \partial_b B_d - \partial_d B_b$$

En contractant (3.0) en c et d , on en déduit l'expression du " tenseur de Ricci ", :

$$R_{ab} = R^c_{abc} = G_{ab} - \frac{1}{2}(\nabla_b B_a + \nabla_a B_b) - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla_c B^c + \frac{1}{2} B_a B_b + g_{ab} B_c B^c + B_{ab} \quad (3.1)$$

Contractant à nouveau en a et b :

$$R = g^{ab} R_{ab}$$

$$R = G - 3 \nabla_c B^c - 3/2 B_c B^c \quad (3.2)$$

b) Extension non symétrique du Tenseur d'Einstein

Comme en Géométrie de Riemann, les composantes du tenseur de courbure satisfont aux Identités de Bianchi :

$$R_{a[bd, 'e]} = 0 \quad (3.3)$$

(, ') désigne ici la dérivée covariante écrite avec la connexion complète Γ^e_{bd}

Nous avons en outre les relations de symétrie :

$$R^c_{[abd]} = R^c_{abd} + R^c_{adb} + R^c_{bda} = 0 \quad (3.4)$$

Par contre, l'antisymétrie du tenseur R_{abcd} par rapport aux indices a et b , n'est plus conservée .

De (3.0), nous pouvons déduire :

$$R_{abcd} + R_{bacd} = -g_{ab} B_{cd} \quad (3.5)$$

D'autre part, le tenseur contracté R_{ab} suivant (3.1) se décompose en une partie symétrique et une autre non symétrique :

$$R_{ab} = R_{(ab)} + R_{[ab]} \quad (3.6)$$

où $R_{[ab]} = B_{ab} \quad (3.7)$

c) Equation fondamentale

Contractons l'identité de Bianchi (3.3) sur les indices a et e , ainsi que sur d et c , après avoir élevé, nous obtenons

$$R^{ce}_{dc',e} + R^{ce}_{ed',c} + R^{ce}_{ce',d} = 0 \quad (3.8)$$

En tenant compte de (3.5), on déduit :

$$R^{ce}_{ce',d} + 2R^{ce}_{dc',e} - g^{ce}B_{ed',c} = 0$$

ou

$$[R^e(d) - \frac{1}{2} \delta^e_d R - \frac{1}{2} B^e_d] ',_e = 0 \quad (3.9)$$

Cette dernière expression présente tous les aspects de l'annulation d'une divergence qui traduit ainsi l'analogue d'une condition de conservation dans la variété de Weyl pour le tenseur de composantes :

$$(S_{ab})_w = [R_{(ab)} - \frac{1}{2}(g_{ab}R + B_{ab})] \quad (3.10)$$

Dans une variété de Riemann ($B_a = 0$), (3.9) se réduit alors à :

$$\nabla_e [G^e_d - \frac{1}{2}g^e_d G] = 0$$

qui rend compte du caractère conservatif du Tenseur d'Einstein

$$S_{ab} = G_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}G$$

Nous pouvons donc admettre que le tenseur du 2^{ème} ordre $(S_{ab})_w$ doit constituer l'extension asymétrique possible du tenseur d'Einstein. Nous appellerons :

$$(S_{ab})_w = 0 \quad (3.11)$$

L'équation de Weyl sans second membre.

3.1.2 Cas intérieur

Mettons toutefois en garde contre l'interprétation formelle d'une telle équation : l'annulation de la divergence (3.9) formée à l'aide des (' ,) , ne traduit plus dans la nouvelle variété de Weyl W_4 , la condition de conservation du tenseur $(S_{ab})_W$.

a) 4-vecteur de Weyl

Nous appellerons B_a : le **4-Vecteur de Weyl** .

Les composantes du tenseur de courbure contracté s'expriment alors uniquement en fonction de ce vecteur :

$$R^a_{abc} = 2 B_{bc} \quad (3.12)$$

Avec la relation (2.23) : $-g_{ab} B_c = D_c g_{ab}$

l'invariant Ω (1.46) s'écrit maintenant simplement :

$$\Omega = -2B_{bc} dx^b \wedge dx^c$$

b) Transport parallèle

D'après (1.16) par transport parallèle, la longueur du vecteur \mathbf{V} subit donc un accroissement $d\mathbf{V}$, tel que :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{V})^2 &= 2\mathbf{V}d\mathbf{V} = B_{ab, c} A^a A^b dx^c \\ &= -B_c g_{ab} A^a A^b dx^c = \mathbf{V}^2 B_c dx^c \end{aligned}$$

ou $d\mathbf{V} = -1/2 \mathbf{V}dB$

c'est-à-dire

$$d(\mathbf{V})^2 = -\mathbf{V}^2 dB \quad (3.13)$$

(avec $dB = B_c dx^c$)

En vertu de (3.12) , nous voyons que la somme des accroissements le long d'un contour fermé déterminé par

(1.18) sera nulle si B_c est le gradient d'une fonction scalaire quelconque : $B_c = \partial_c U(x^a)$

3.1.3 Variation du vecteur de Weyl

Nous allons maintenant chercher à évaluer la variation linéaire infinitésimale du 4-vecteur B_a , au point fixe dx^4 de W_4 : soit

$$B'_a = B_a + \varepsilon_a$$

cette variation, où ε_a est le 4-vecteur variation linéaire.

En vertu de (3.13), au vecteur B_a' , correspond l'accroissement dV' du vecteur V' défini par :

$$(V')^2 = g_{ab} A^{a'} A^{b'}$$

tel que :

$$d(V')^2 = -V'^2 B_a' dx^{a'}$$

soit :

$$d(V')^2 = -V'^2 (B_a + \varepsilon_a) dx^{a'}$$

ou :

$$d(V')^2 = -[V'^2 B_a + \varepsilon_a V'^2] dx^{a'} \quad (3.14)$$

La forme de (3.14) suggère que l'accroissement $d(V')^2$ résulte de la relation :

$$V'^2 = e^U V^2$$

où $U(x^a)$ est une fonction scalaire et locale.

On a en effet :

$$d(V')^2 = e^U d(V)^2 + V^2 e^U dU$$

c'est-à-dire :

$$d(B')^2 = (-e^U B_a V^2 + V^2 e^U \partial_a U) dx^{a'} \quad (3.15)$$

et en identifiant à :

$$-[V'^2 B_a + \varepsilon_a V'^2] dx^{a'}$$

on voit qu'il faut poser :

$$-\varepsilon_a = \partial_a U$$

d'où :

$$\delta B_a = -\partial_a U \quad (3.16)$$

La condition $dx^{a'} = dx^a$
implique

$$(g_{ab})' = e^U g_{ab} \quad (3.17)$$

La métrique est alors conforme .

Nous voyons ainsi que la variation infinitésimale du 4-vecteur de Weyl B_a donnée par la relation (3.16) au **même point d'espace-temps**, réduit la connexion de Weyl à une connexion riemannienne, c'est-à-dire à l'annulation de la courbure segmentaire.

Toujours suivant la relation (3.16), nous dirons que la variété riemannienne (Lorentzienne), constitue **l'approximation linéaire** d'un schéma plus global dont va rendre compte l'équation de Weyl (3.11).

Chapitre 4 . Conséquences de la courbure de Weyl

4.1 Hydrodynamique dans la Variété de Weyl

4.1.1 Schéma Fluide neutre homogène

a) Tenseur massique dans (M,g)

Nous rappellerons tout d'abord qu'un fluide homogène neutre est caractérisé par un scalaire que nous noterons ρ et qui est défini comme une *pseudo densité* .

Ce scalaire généralise la densité propre du fluide ρ_0 et peut inclure d'autres caractéristiques comme par exemple l'énergie interne , la pression , ou la viscosité statique.

La distribution énergétique correspondante est décrite par un tenseur dont la forme la plus générale est :

$$M_{ab} = \rho u_a u_b - \Pi_{ab} \quad (4.0)$$

De même, le tenseur Π_{ab} qui est symétrique, peut être représentatif de diverses caractéristiques du fluide, telles que la pression interne ou la charge électrique

Le 4-vecteur u^a étant unitaire dans (M,g) , on a :

$$g_{ab} u^a u^b = g^{ab} u_a u_b = 1$$

soit en différentiant :

$$u^b \nabla_a u_b = 0 \quad (4.1)$$

Définissons maintenant le vecteur L_b par la relation :

$$\nabla_a \Pi^a_b = \rho L_b \quad (4.2)$$

Les conditions de conservation pour M_{ab} s'écrivent :

$$\nabla_a M^a_b = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla_a (r u^a u_b) &= r L_b \\ \nabla_a (r u^a) u_b + r u^a \nabla_a u_b &= r L_b \end{aligned} \quad (4.2)'$$

Multipliant cette dernière relation par u^b et tenant compte de (4.1), nous obtenons en substituant dans (4.2)' et après avoir divisé par r :

$$u^a \nabla_a u_b = (g_{ab} - u_a u_b) L^a \quad (4.3)$$

soit :

$${}^*u_b = h_{ab} L^a \quad (4.3)'$$

($h_{ab} = g_{ab} - u_a u_b$ est le tenseur de projection)

*u_b représente l'accélération des lignes de courant qui satisfont au système différentiel (4.3) .

Ces lignes de courant sont les lignes partout tangentes au 4-vecteur vitesse unitaire u_c .

Lorsque $\Pi_{ab} = 0$, les équations (4.2) et (4.3)' s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla_a (r u^a) &= 0 \\ u^a \nabla_a u_b &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Il s'agit là du schéma dit *matière pure* , également appelé „ matière incohérente “ , et où l'on peut prendre maintenant :

$$r = \rho_0$$

Dans ce cas (4.4) exprime que les lignes de courant sont des géodésiques de la métrique ds^2 de (M, g) .

b) Indice du fluide

Nous allons maintenant envisager un cas particulier important qui est celui du schéma ou milieu *holonome*.

Par définition , il en est ainsi si L_b est le gradient d'une fonction scalaire positive $U(x^a)$;

Nous poserons :

$$L_b = \frac{1}{2} \partial_b U \quad (4.5)$$

L'équation (4.3)' prend la forme :

$${}^*u_b = \frac{1}{2} h_{ab} \partial^a U \quad (4.6)$$

Considérons en particulier un *fluide parfait* dans un mouvement tel que l'on puisse déduire l'existence d'une

équation d'état liant la densité propre et la pression interne P_r :

$$\rho_o' = \rho_o (P_r)$$

Le tenseur Π_{ab} se réduit à $P_r g_{ab}$ et $r = \rho_o' = \rho_o + P_r$.

La distribution énergétique correspondante s'écrit alors :

$$M_{ab} = (\rho_o + P_r) u_a u_b - P_r g_{ab} \quad (4.7)$$

et :

$$(\rho_o + P_r) L_b = \nabla_a (P_r g^a_b)$$

soit :

$$L_b = \partial_b P_r / (\rho_o + P_r) \quad (4.8)$$

Il en résulte que :

$$U = \int_{P_{r1}}^{P_{r2}} P_r / (\rho_o + P_r) \quad (4.9)$$

Les lignes de courant du milieu holonome considéré satisfont donc au système différentiel :

$$*u_b = \frac{1}{2} h^a_b \partial_a U \quad (4.10)$$

avec :

$$u^a = dx^a / ds = *x^a \quad (4.11)$$

Ce dernier vecteur est tangent à la courbe C de (M, g) , dont l'abscisse curviligne est notée s .

Considérons à présent la fonction f à valeurs scalaires telle que :

$$f = e^{U/2} \sqrt{g_{ab}} *x^a *x^b \quad (4.12)$$

ou

$$f^2 = e^U g_{ab} *x^a *x^b \quad (4.13)$$

A la fonction f et à l'arc de courbe C , joignant 2 points fixes S_1 et S_2 de (M, g) , on peut associer l'intégrale :

$$A = \int_{S_1}^{S_2} f(x^a, *x^a) ds \quad (4.14)$$

Appliquons lui le principe variationnel :

$$\delta A = \delta \int_{S_1}^{S_2} f(x^a, *x^a) ds = \int_{S_1}^{S_2} (E_b \delta x^b) ds = 0 \quad (4.15)$$

Les E_b représentent les équations d'*Euler* associées à la fonction f :

$$E_b = (d/ds)(\partial f / \partial x^b) - \partial f / \partial x^b = 0 \quad (4.16)$$

Dans ces conditions , nous voyons donc d'après (4.12), que

$$f ds = ds' = e^{U/2} ds \quad (4.17)$$

c'est-à-dire :

$$(ds^2)' = e^U ds^2 \quad (4.18)$$

Dérivons (4.13) :

$$f(\partial f / \partial x^b) = e^U g_{ab} x^a \Rightarrow \partial f / \partial x^b = e^{U/2} ds_b \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \partial f / \partial x^b &= \partial_b e^{U/2} + \frac{1}{2} e^{U/2} \partial_b (g_{ac} u^a u^c) \\ &= \partial_b e^{U/2} + e^{U/2} \{_{ab,c}\} u^a u^c \end{aligned} \quad (4.20)$$

les $\{_{ab,c}\}$ désignent ici les symboles de Christoffel de première espèce .

Développons maintenant les composantes E_b :

$$\begin{aligned} E_b &= (d/ds)(\partial f / \partial x^b) - \partial f / \partial x^b \\ &= (d/ds)(e^{U/2} ds_b) - e^{U/2} (\{_{ab,c}\} u^a u^c) - \partial_b e^{U/2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$E_b = e^{U/2} (u^a \partial_a ds_b - \{_{ab,c}\} u^a u^c) - \partial_a e^{U/2} h^a_b$$

On obtient alors :

$$E_b = e^{U/2} (u^a \nabla_a ds_b) - \frac{1}{2} \partial_a U h^a_b \quad (4.21)$$

A partir de (4.15) , pour que A soit alors extrémale , il faut et il suffit que :

$$u^a \nabla_a ds_b - \frac{1}{2} \partial_a U h^a_b = 0 \quad (4.22)$$

(puisque $e^{U/2} \neq 0$)

Le système différentiel (4.22) formellement identique à l'expression (4.6) , caractérise les lignes de courant d'un fluide *homogène parfait*.

Ces lignes de courant sont des géodésiques orientées dans le temps de la métrique conforme à la métrique d'univers ds^2 de (M, g) :

$$A = s' = \int_{ds^1}^{ds^2} e^{U/2} ds$$

Le facteur de conformité $e^{U/2}$ représente « l'indice du fluide » associé à la métrique conforme

$$(ds^2)' = e^U ds^2 \quad (4.23)$$

Le domaine de (M,g) balayé par une métrique « holonome » sera ainsi doué de la nouvelle métrique définie par :

$$(g_{ab})' = e^U g_{ab} \quad \text{et} \quad (g^{ab})' = e^{-U} g^{ab} \quad (4.24)$$

puisque nous avons posé par hypothèse $(dx^a)' = dx^a$

Ainsi nous voyons qu'un schéma « fluide homogène parfait » (caractérisé par une pression P_r), entraîne immédiatement l'émergence d'une métrique conforme, dont le facteur de conformité contient l'expression :

$$U = \int dP_r / (P_r + \rho_0) \quad (4.25)$$

4.1.2 Conséquences physiques de la variation du 4-vecteur B_a

Nous partons maintenant de l'équation de Weyl (sans second membre) telle que nous l'avons définie en (3.11), et nous en déduisons la forme qu'elle revêt suivant les différents modes de variation du vecteur de Weyl .

a) Variation finie

La « linéarisation riemannienne » (3.16) représente une variation infinitésimale **finie** du

4-vecteur de Weyl B_a : il en résulte donc la réduction de la variété **W4** à une variété Lorentzienne conforme $(M,g)'$.

Dans ce cas, les lignes de courant du fluide homogène décrit par le tenseur massique (cas intérieur), satisfont à l'équation des géodésiques :

$${}^*u_a = \frac{1}{2} \partial_b U h_a^b \quad (4.26)$$

ou d'une façon équivalente :

$$({}^*u_a)' = 0 \quad (4.27)$$

Dans ces conditions, le tenseur massique correspondant s'écrit :

$$(M_{ab})' = \rho_0 (u_a)'(u_b)' \quad (4.28)$$

et avec lui l'équation des champs devient :

$$(S_{ab})' = \mathbf{X} (M_{ab})' \quad (4.29)$$

où $(S_{ab})'$ est le tenseur d'Einstein conforme (1.54), et \mathbf{X} est la constante d'Einstein.

Dans ce cas, nous dirons alors qu'il existe une équivalence entre l'équation de Weyl (3.11) sans second membre, et l'équation (4.29) : nous verrons que le choix de la forme de (3.11) se justifie à posteriori :

b) Variation nulle du 4-vecteur de Weyl

Si la variation linéaire du 4-vecteur de Weyl B_a est nulle ($\delta B_a = 0$), c'est-à-dire si B_a demeure partout constant dans un domaine (local) de la variété W_4 , cette dernière se réduit dans cette région, à une variété riemannienne non-conforme, et l'équation des champs pour le cas intérieur se réduit à :

$$S_{ab} = \mathbf{X} M_{ab} \quad (4.30)$$

c) Annulation du 4-vecteur de Weyl

Toujours dans un domaine précis de W_4 , si l'on peut annuler localement le 4-Vecteur B_a , l'équation de Weyl se réduit tout simplement à l'équation des champs sans second membre :

$$S_{ab} = 0 \quad (4.31)$$

c'est-à-dire en l'absence **totale** de matière, ce que traduit bien la cohérence de la forme choisie initialement en (3.11).

Nous voyons ainsi que selon le mode de variation du vecteur de Weyl B_a , apparaissent successivement 3 formes de l'équation des champs.

4.2 Interprétation dans le cadre de la Relativité Générale classique

Que pouvons nous conclure au terme de notre étude ?

Les vérifications expérimentales consécutives aux observations astronomiques de plus en plus sophistiquées ont toutes confirmé la validité de la Théorie d'Einstein telle qu'elle fût publiée en 1916 :

En particulier, la Relativité Générale a su admirablement prédire la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil et la précession correcte du périhélie de l'orbite de Mercure ;

en dehors de la beauté mathématique de la Théorie, ces deux prédictions ont affirmé définitivement les fondements de la Physique Relativiste à grande échelle .

Or, on doit supposer que cette physique couronnée de succès, se vérifie dans n'importe quelle **métrique**, et c'est précisément pourquoi on a pu jusqu'à présent se satisfaire des résultats acquis dans la nôtre .

De fait, les équations qui régissent la Relativité Générale s'appuient sur une métrique unique (variété fixe), écartant la possibilité de sa variation covariante.

Notre physique resterait ainsi confinée dans les deux cas de figure b) et c), ignorant le

cas a), ce dernier n'étant lui-même que la conséquence de la théorie à courbure non riemannienne que nous proposons ici .

4.2.1 Concordances des vérifications expérimentales

A l'échelle de l'Univers observable, l'introduction d'une variété conforme ne contredit donc nullement les validations relativistes : la nature des résultats expérimentaux demeure identique si ceux-ci sont mesurés dans une *métrique différente*.

A titre d'exemple, prenons le cas du déplacement séculaire systématique du périhélie de l'orbite de Mercure :

si M est la masse du Soleil créant le champ gravitationnel et m la masse de la planète, le déplacement angulaire de l'ellipse newtonienne pendant la période de rotation est donnée par le terme de correction relativiste :

$$\delta\phi = 6 k^2 m^2 M^2 / C^2$$

soit 43 " d'arc par siècle, en accord avec les mesures astronomiques.

où k est la constante de Newton, et C le moment cinétique de Mercure.

On voit que cette correction s'exprime sous la forme d'un *rapport*, c'est dire encore que si l'on adopte la métrique $(g_{ab})'$ au lieu de g_{ab} , les grandeurs m , M et C deviendront m' , M' et C' : en conséquence de quoi, le rapport $m^2 M^2 / C^2$ demeurera manifestement constant.

On vérifierait aisément qu'il en est de même pour la déviation convexe d'un rayon lumineux sous l'influence du champ de gravité du Soleil.

C'est la raison pour laquelle aucune altération de ces résultats qui serait due à notre hypothèse, n'a pu être mise en évidence

Les conséquences de la Relativité Générale Riemannienne sont à notre échelle, toujours compatibles avec les conclusions de notre étude .

Pour une métrique donnée (celle que nous adoptons dans nos équations), le facteur de conformité se traduit donc pour

nous, par un aspect physique que nous avons jusqu'à présent négligé, à savoir l'équivalent d'une *pression permanente* .

Considérant encore comme en cosmologie relativiste usuelle, les vitesses des masses de l'Univers comme petites en comparaison de la vitesse de la lumière, on tire encore de l'expression (4.7) :

$$M = (\rho_0 + P_r) - 3 P_r$$

où la pression P_r , contrairement aux modèles cosmologiques standards, n'est plus ici négligeable.

In finé, dans le cadre d'une courbure généralisée, notre modèle aboutit à une conclusion très générale :

L'énergie pondérable (Matière-Energie) familièrement perçue à notre échelle technologique cosmique, est en quelque sorte «contenue» dans le vecteur de Weyl par l'intermédiaire de l'expression B_{ab} de l'équation de Weyl.

C'est bien en fin de compte ce vecteur qui «géométrise» toute la phénoménologie de l'Univers à très grande échelle, état dont nous n'avons peut être jamais perçu la globalité en n'appréhendant que sa partie linéaire (approximation riemannienne) .

4.2.2 Implication physique de la courbure de Weyl dans la perspective de la théorie des *Universons* proposée par Claude POHER

Un modèle cosmologique à courbure de Weyl peut-être donc développé à partir des éléments précités .

La dynamique de son expansion ainsi que sa singularité initiale, ne constitueraient plus à cet égard que des irrégularités « locales » perçues exclusivement à notre échelle « Riemannienne ».

De la même façon, pourrait on éviter le problème posé de sa finalité qui deviendrait du même coup irrelevant.

Une telle généralisation n'est réalisable qu'en introduisant le 4-Vecteur de Weyl B_a dont la signification physique vient d'être dégagée dans le cadre riemannien .

En nous reportons à l'expression du facteur de conformité e^U pour l'indice du fluide, l'expression U établie en (4.9) intègre un terme de pression lié à la densité du fluide qui constitue notre Univers.

Ainsi que nous l'avons vu, il est alors loisible de considérer le 4-vecteur de Weyl B_a comme introduisant ipso facto **un terme de pression généralisé** dans sa géométrisation du tenseur Energie-Impulsion **et ce terme est inhérent à la variété W_4** .

La variété de Weyl serait en quelque sorte caractérisée par un état géométrique « confiné » que l'approximation riemannienne restitue à notre échelle, sous la forme d'une **pression physique permanente** , qui baignerait tout l'Univers.

Il est alors tout-à-fait intéressant de lier cette « pression » cosmique à une contribution macroscopique du flux moyen d'**Universons** en interaction avec la densité de matière , dans le cadre de l'approximation riemannienne de notre théorie.

Les éléments de structure d'un nouveau modèle cosmologique que nous avons proposé ici, semblent en tout cas militer en faveur de la thèse développée et soutenue par Claude POHER.

*P.Marquet
Décembre 2003*

INFORMATIONS SUR PATRICK MARQUET

Monsieur Patrick Marquet est né en 1948.
Après avoir obtenu un doctorat de 3ème cycle en Physique Générale,
il commence sa carrière dans la recherche fondamentale,
au Laboratoire de Physique Astronomique de l'Observatoire de Paris,
sous la direction du Professeur LALLEMAND.

Il y participe à l'amélioration des «Caméras électroniques et Magnétiques»
(Ancêtres des CCD) capables de réduire notablement les temps de pose
nécessaires au télescope, par conversion de l'énergie des photons
en électrons accélérés, puis photographiés.(Electronographie).

Il poursuit ensuite une trajectoire professionnelle privée, orientée dans la
direction technique de plusieurs groupes internationaux : Worthington ,
Sperry-Rand-Vickers, où il se spécialise dans l'hydrodynamique appliquée.

Il poursuit actuellement sa carrière, au sein d'un important groupe
industriel Allemand WACKER-CHEMIE (MUNICH),
en tant que directeur technique pour la France :
chargé en particulier de la recherche sur les transferts thermiques des
structures nanoporeuses (silices pyrogénées, sous vide).

Parallèlement enfin, il se penche depuis plus de vingt ans sur l'aspect
relativiste de la Physique appliquée : thermodynamique,
transferts par conduction , etc...